

التمرين الأول: (6 نقط)

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي: $u_0 = 5$ و $(\forall n \in \mathbb{N}): u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n + 2}$

1- تحقق أن: $(\forall n \in \mathbb{N}): u_{n+1} = 4 - \frac{8}{u_n + 2}$ (0.5)

ب- بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}): u_n > 2$ (1.25)

2- أ- بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}): u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(2 - u_n)}{u_n + 2}$ (0.75)

ب- أدرس رتبة المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

ج- استنتج أن: $(\forall n \in \mathbb{N}): 2 < u_n \leq 5$ (0.5)

3- أ- بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}): \frac{2}{u_n + 2} \leq \frac{1}{2}$ (0.5)

ب- بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}): u_{n+1} - 2 \leq \frac{1}{2}(u_n - 2)$ (0.5)

ج- استنتج أن: $(\forall n \in \mathbb{N}): 0 < u_n - 2 \leq 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (1)

التمرين الثاني: (7 نقط)

نعتبر في المستوى المنسوب لمعلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ النقط: $A(3; 2)$ و $B(5; 4)$ و $C(1; 4)$.

1- أ- أحسب: BA و BC و $\overline{BA} \cdot \overline{BC}$. (1.5)

ب- أحسب: $\cos(\overline{BA}; \overline{BC})$ و $\sin(\overline{BA}; \overline{BC})$. (1.75)

ج- استنتج القياس الرئيسي للزاوية الموجهة: $(\overline{BA}; \overline{BC})$. (1)

2- أحسب $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ ثم استنتج أن المثلث ABC قائم الزاوية ومتساوي الساقين. (1)

3- ليكن (D) المستقيم الذي معادلته: $x + 2y - 1 = 0$. (1)

أ- إعط معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ) المار من النقطة A والعمودي على المستقيم (D) . (1)

ب- استنتج إحداثيات H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (D) . (1)

التمرين الثالث: (7 نقط)

المستوى منسوب الى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

نعتبر الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(2; 1)$ و المستقيم (D) ذا المعادلة $x - 2y + 10 = 0$ مماس لها.

1- أ- بين أن شعاع الدائرة (C) هو $R = 2\sqrt{5}$. (0.75)

ب- بين أن $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 15 = 0$ هي معادلة ديكارتية للدائرة (C) . (0.75)

2- تحقق أن النقطة $A(4; -3)$ تنتمي إلى الدائرة (C) ; ثم إعط معادلة (T) مماس الدائرة (C) في النقطة A . (1.25)

3- ليكن (Δ) المستقيم الذي معادلته: $x + y - 1 = 0$. (0.5)

أ- بين المستقيم (Δ) يقطع الدائرة (C) في نقطتين E و F . (0.5)

ب- حدد إحداثيات كل من E و F . (1)

4- حل مبيانيا النظمة:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y - 15 < 0 \\ x + y - 1 \geq 0 \end{cases}$$
 (1)

5- أ- تحقق أن النقطة $B(-1; 5)$ توجد خارج الدائرة (C) . (0.5)

ب- حدد معادلتا المماسين (Δ_1) و (Δ_2) للدائرة (C) المارين من النقطة B . (1.25)